

Mathematik Olympiade 14.11.2025

1.

Für Fahrplan A bräuchte man 2 und für Fahrplan B 3 Busse. Fahrplan B lohnt sich mehr, weil nur ein Bus mehr eingesetzt wird, aber die doppelte Anzahl an Fahrten stattfinden. Außerdem ist es produktiver, weil zwischen jeder Fahrt eine Pause von 5 Minuten liegt, bei Fahrplan A jedoch 20 Minuten.

Um die minimal erforderliche Anzahl an Fahrzeugen zu berechnen, nennen wir diese Anzahl N . Die Formel für N lautet:

$$N = \frac{\text{Hin- und Rückfahrt}}{\text{Intervall zwischen den Bussen}}.$$

Für Plan A hat man dann:

$$N = \frac{40}{30} = 1,33 \Rightarrow \text{mindestens 2 Busse.}$$

Für Plan B gilt:

$$N = \frac{40}{15} = 2,66 \Rightarrow \text{mindestens 3 Busse.}$$

Es wird immer zur kleinsten natürlichen Zahl aufgerundet, da es keine halben Busse geben kann.

2.

Rein rechnerisch ist es möglich, dass der Fahrplan mit 4 Fahrern aufgeht. Allerdings würde es in der Praxis dazu führen, dass ein Fahrer 13,5 Stunden täglich arbeiten müsste. Das ist problematisch. Außerdem sind Urlaub und Krankheit nicht berücksichtigt.

Annahmen:

1. Jeder Bus muss während der gesamten Betriebszeit von einem Fahrer gefahren werden.
2. Pausen werden berücksichtigt.
3. Schichtlängen sind ganze Zahlen in Stunden; bei Bedarf wird auf ganze Fahrer gerundet.

Betriebszeit pro Tag: Der erste Bus fährt um 06:00 Uhr, der letzte Bus um 24:00 Uhr. Das ergibt eine Fahrzeit von 18 Stunden.

Für Fahrplan B braucht man mindestens 3 Busse (siehe Aufgabe 1).

$$H = N \cdot \text{Betriebsstunden} = 3 \cdot 18 = 54.$$

Pro Tag müssen also 54 Stunden Fahrzeit abgedeckt werden.

S = typische Vollsicht (8 Stunden) **D** = Mindestanzahl an Fahrern pro Tag

$$D = \frac{54}{8} = 6,75$$

Man benötigt also 7 Fahrer.

Für den Fall von 4 Fahrern:

$$\frac{54}{4} = 13,5$$

Jeder Fahrer müsste 13,5 Stunden arbeiten, was nicht zulässig ist.

3.

Wir nehmen an, dass die Busfahrer 2 Schichten mit jeweils 4 Stunden maximaler Fahrzeit haben dürfen, wobei die Platzierung der Schichten über den gesamten Tag verteilt sein kann. Außerdem gehen wir davon aus, dass wir einen Minijobber einsetzen dürfen, der 1 Stunde 40 Minuten pro Tag arbeitet, um eine Lücke im Fahrplan zu schließen.

Die Fahrten an einem Tag werden folgendermaßen berechnet:

$$10 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 47$$

Da eine Fahrt 40 Minuten dauert, ergibt sich die Gesamtfahrzeit:

$$47 \cdot 40 = 1880 \text{ Minuten} \quad \text{oder} \quad 31 \text{ Stunden } 20 \text{ Minuten.}$$

Ein Fahrer kann jedoch nur 2 Blöcke am Tag mit jeweils 4 Stunden arbeiten, plus einer Pause von mindestens 45 Minuten. Die effektivste Arbeitszeit beträgt somit:

$$525 \text{ Minuten} = 8 \text{ Stunden } 45 \text{ Minuten.}$$

Für die gesamte Fahrzeit benötigt man:

$$\frac{1880}{525} \approx 3,58 \Rightarrow \text{mindestens 4 Fahrer.}$$

Allerdings überlappen sich die Abfahrtszeiten im 15-min- oder 30-min-Takt, weswegen mehr als vier Busfahrer benötigt werden, um den ganzen Tag abzudecken. Insgesamt kommt man auf sechs Busfahrer, inklusive eines Minijobbers.

Nachteile: Verspätungen treten häufiger auf, da wenig Zeit zwischen Ankunft und Abfahrt bleibt.

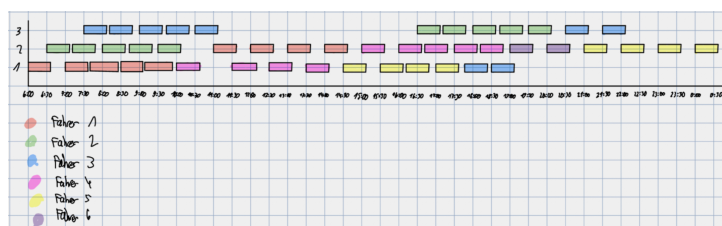
Vorteile: Weniger Busse und Personal, was geringere Kosten bedeutet. Außerdem müssen Fahrer nicht 20 Minuten warten, sondern fahren effektiver weiter.

Busfahrplan

Busfahrer 1				
Fahrtnummer	Abfahrtszeit	Ankunftszeit	Abfahrtsort	Bemerkung
1	06:00	06:40	Bahnhof	
2	07:00	07:40	Bahnhof	
3	07:45	08:25	Bahnhof	
4	08:30	09:10	Bahnhof	
5	09:15	09:55	Bahnhof	
Pause	09:55	11:00		1h 5min Pause
6	11:00	11:40	Bahnhof	
7	12:00	12:40	Bahnhof	
8	13:00	13:40	Bahnhof	
9	14:00	14:40	Bahnhof	
Gesamte Zeit	06:00	14:40		
Arbeitszeit	8h 40min			
Busfahrer 2				
Fahrtnummer	Abfahrtszeit	Ankunftszeit	Abfahrtsort	Bemerkung
1	06:30	07:10	Bahnhof	
2	07:15	07:55	Bahnhof	
3	08:00	08:40	Bahnhof	
4	08:45	09:25	Bahnhof	
5	09:30	10:10	Bahnhof	
Schichtende	10:10			2 Schichten
6	16:30	17:10	Bahnhof	
7	17:15	17:55	Bahnhof	
8	18:00	18:40	Bahnhof	
9	18:45	19:25	Bahnhof	
10	19:30	20:10	Bahnhof	
Gesamte Zeit	06:30 - 10:10	16:30 - 20:10		
Arbeitszeit	7h 20min			

Busfahrer 3				
Fahrtnummer	Abfahrtszeit	Ankunftszeit	Abfahrtsort	Bemerkung
1	07:30	08:10	Bahnhof	
2	08:15	08:55	Bahnhof	
3	09:00	09:40	Bahnhof	
4	09:45	10:25	Bahnhof	
5	10:30	11:10	Bahnhof	
Schichtende	11:10			2 Schichten
6	17:45	18:25	Bahnhof	
7	18:30	19:10	Bahnhof	
Pause	19:10	20:30		1h 20min
8	20:30	21:10	Bahnhof	
9	21:30	22:10	Bahnhof	
Gesamte Zeit	07:30 - 11:10	17:45 - 22:10		
Arbeitszeit	8h 5min			
Busfahrer 4				
Fahrtnummer	Abfahrtszeit	Ankunftszeit	Abfahrtsort	Bemerkung
1	10:00	10:40	Bahnhof	
2	11:30	12:10	Bahnhof	
3	12:30	13:10	Bahnhof	
4	13:30	14:10	Bahnhof	
Pause	14:10	15:00		50 min Pause
5	15:00	15:40	Bahnhof	
6	16:00	16:40	Bahnhof	
7	16:45	17:25	Bahnhof	
8	17:30	18:10	Bahnhof	
9	18:15	18:55	Bahnhof	
Gesamte Zeit	10:00	18:55		
Arbeitszeit	8h 55min			

Busfahrer 5				
Fahrtnummer	Abfahrtszeit	Ankunftszeit	Abfahrtsort	Bemerkung
1	14:30	15:10	Bahnhof	
2	15:30	16:10	Bahnhof	
3	16:15	16:55	Bahnhof	
4	17:00	17:40	Bahnhof	
Schichtende	17:40			2 Schichten
5	21:00	21:40	Bahnhof	
6	22:00	22:40	Bahnhof	
7	23:00	23:40	Bahnhof	
8	00:00	00:40	Bahnhof	
Gesamte Zeit	14:30 - 17:40	21:00 - 00:40		
Arbeitszeit	6h 50min			
Busfahrer 6				
Fahrtnummer	Abfahrtszeit	Ankunftszeit	Abfahrtsort	Bemerkung
1	19:00	19:40	Bahnhof	Minijob !
2	20:00	20:40	Bahnhof	
Gesamte Zeit	19:00	20:40		
Arbeitszeit	1h 40min			



4a.

Volle Batterie: SoC = 100% Pro Fahrt sinkt der SoC um 15%. Laden: +1% pro Minute. Betriebszeit: 18 h = 1080 min.

1. Entladesequenz:

SoC:

$$100 \rightarrow 85 \rightarrow 70 \rightarrow 55 \rightarrow 40 \rightarrow 25 \rightarrow 10$$

6 Fahrten pro Zyklus

2. Ladezeit:

$$100\% - 10\% = 90\% = 90 \text{ min}$$

3. Zykluszeit:

$$6 \cdot 40 + 90 = 330 \text{ min}$$

4. Zyklen pro Tag:

$$\frac{1080}{330} = 3,27 \Rightarrow 3 \text{ Zyklen}$$

Fahrten nach 3 Zyklen:

$$3 \cdot 6 = 18$$

Verbleibende Zeit:

$$1080 - 990 = 90 \text{ min}$$

Damit sind noch 2 Fahrten möglich \rightarrow Gesamt:

$$18 + 2 = 20 \text{ Fahrten}$$

Dies gilt jedoch nur am ersten Tag. Da am nächsten Tag ein vollständig geladener Start nötig ist, sind realistisch:

$18 \text{ Fahrten pro Tag}$

4b.

Wie bereits in 4a berechnet, beträgt die maximale Fahrtenanzahl pro E-Bus pro Tag:

$$20 \text{ Fahrten pro Tag}$$

Abfahrten pro Stunde im 15-Minuten-Takt:

$$\frac{60}{15} = 4 \text{ Fahrten pro Stunde.}$$

Rundfahrten pro Tag (18 Stunden Betriebszeit):

$$6 \cdot 4 + 10 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 47 \text{ Rundfahrten.}$$

Daraus ergibt sich der minimale Bedarf an E-Bussen:

$$47/20=2,35 \Rightarrow \text{mindestens 3 E-Busse.}$$

Es müssen also gleichzeitig immer drei Busse unterwegs sein.

Jeder Bus nutzt pro Tag etwa 270 Minuten Ladezeit (bei drei Ladezyklen). Der Fuhrpark aus drei Bussen liefert insgesamt ausreichend Lade-Reservezeit, denn jeweils nur ein Bus muss gleichzeitig laden. Dies ist jedoch nur unter perfekter Abstimmung der Ladezeiten möglich und daher sehr knapp. Aus Sicherheitsgründen (Verspätungen, technische Ausfälle) empfehlen wir den Einsatz von:

4 Bussen

um den Betrieb zuverlässig stabil zu halten.

Es sind nicht weniger als drei Busse möglich, da sonst der 15-Minuten-Takt unterbrochen würde. Zudem kann ein einzelner Bus maximal 20 Fahrten am Tag leisten. Mit nur zwei Bussen wären also nur:

$$2 \cdot 20 = 40 \text{ Fahrten}$$

möglich – und der Fahrplan könnte nicht erfüllt werden.

Berechnung der benötigten Fahrer:

Zu jedem Zeitpunkt müssen drei Fahrer im Einsatz sein (da drei Busse gleichzeitig fahren):

$$3 \text{ Fahrer} \cdot 18 \text{ h} = 54 \text{ Fahrerstunden.}$$

Ein Fahrer darf maximal 9 Stunden am Tag eingesetzt werden (inklusive Pausen). Damit ergibt sich die minimale Anzahl an Fahrern:

$$\frac{54}{9} = 6.$$

Es werden also mindestens:

6 Fahrer

benötigt. Weniger Fahrer sind nicht möglich, da sonst ein Fahrer mehr als 9 Stunden täglich arbeiten müsste.

5.

Bei dieser Option soll der bereits entwickelte optimale Fahrplan exakt eingehalten werden, um den Fahrgästen den bestmöglichen Service zu bieten. Der 15-Minuten-Takt während der Stoßzeiten, der in den bisherigen Aufgaben als entscheidend für die Reduzierung des Fahrgastaufkommens festgestellt wurde, bleibt bestehen. Das Ziel dieser Variante ist also eine maximale Fahrgastzufriedenheit.

Der Einsatzplan der Busse ist darauf ausgerichtet, alle Haltestellen mit geringen Intervallen anzufahren, obwohl nur fünf Elektrobusse zur Verfügung stehen. Vier Fahrzeuge befinden sich gleichzeitig im Fahrbetrieb, während der fünfte Bus als Lade- und Ausgleichsreserve dient. Da ein Elektrobus über den Tag hinweg etwa 675 SoC-Punkte verbraucht und aufgrund der Ladegeschwindigkeit von einem SoC-Punkt pro Minute rund 11,25 Stunden Ladezeit benötigt, muss die gesamte Ladeorganisation an einer Ladesäule sehr präzise koordiniert werden. Dies führt zu stark getakteten Abläufen, die potenziell fehlerhaft aufgrund von Verspätungen sein können.

Die Vorteile dieser Variante sind klar: Der optimale Fahrplan kann ohne Einschränkungen umgesetzt werden, wodurch die Probleme überfüllter Busse in den Hauptverkehrszeiten deutlich reduziert werden. Die Fahrgäste profitieren von kurzen Intervallen, hoher Zuverlässigkeit und vielen Bussen zu den Hauptverkehrszeiten.

Es gibt jedoch ein erhebliches Risiko: Das gesamte System hängt von einer einzigen Ladesäule ab. Ein technischer Defekt oder eine Verzögerung im Ladeprozess hätte unmittelbare Auswirkungen auf den 15-Minuten-Takt und könnte sogar zum Ausfall ganzer Linienabschnitte führen. Außerdem wird die Personalplanung anspruchsvoller, da Fahrwechsel, Ladepausen und Umläufe exakt aufeinander abgestimmt werden müssen. Sogar kleine Abweichungen können zu Verspätungen oder Ausfällen führen.

Insgesamt ist diese Lösung zwar technisch umsetzbar und fördert den emissionsfreien Verkehr, erhält gleichzeitig jedoch den Komfort des bisherigen Fahrplans. Allerdings erfordert sie einen hohen organisatorischen Aufwand und macht das System empfindlich gegenüber Störungen, wie zum Beispiel Verspätungen, Defekte oder Ausfälle von Fahrern.

Quellen & Hilfsmittel

- Hilfe für LaTeX: <https://de.wikipedia.org/wiki/Hilfe:TeX>
- Schreiben mit LaTeX: <https://latex.informatik.uni-halle.de/latex-online/latex.php>
- Formatierungshilfen in LaTeX: <https://chatgpt.com/>
- Informationen zum Arbeitsrecht: <https://www.gesetze-im-internet.de/arbzg/BJNR117100994.html>.
- Stichpunkte aus Aufgabe 5 in Text umwandeln: <https://chatgpt.com/>